

**GENCOL : Une équipe et
un logiciel d'optimisation**

J. Desrosiers

G-2010-06

Février 2010

GENCOL : Une équipe et un logiciel d'optimisation

Jacques Desrosiers

*GERAD & HEC Montréal
3000, chemin de la Côte-Sainte-Catherine
Montréal (Québec) Canada, H3T 2A7*

jacques.desrosiers@hec.ca

Février 2010

Les Cahiers du GERAD

G-2010-06

Copyright © 2010 GERAD

Résumé

Dans cet article, on raconte l'histoire de l'équipe GENCOL et du logiciel d'optimisation du même nom. C'est avant tout le récit d'une collaboration qui se poursuit depuis trente ans entre les chercheurs François Soumis et Jacques Desrosiers, les institutions universitaires HEC Montréal et l'École Polytechnique de Montréal, les centres de recherche CRT et GERAD, ainsi que les sociétés essaimées GIRO et AD OPT.

Abstract

In this paper, we report the story of the GENCOL team and of the optimization software of the same name. This is first of all the history of a collaboration that has lasted for thirty years between François Soumis and Jacques Desrosiers, HEC Montréal and École Polytechnique de Montréal, the research centers CRT and GERAD, and the spin off companies GIRO and AD OPT.

1 Introduction

L'aventure de l'équipe GENCOL débute en 1980. À cette époque, François Soumis est alors coopérant canadien au Rwanda pour une période de dix-huit mois. Il y enseigne les statistiques et les rudiments d'informatique. Jacques Desrosiers et lui communiquent régulièrement par la poste (!) et, à un moment donné, François fait part de son manque de stimulation en recherche. Par retour du courrier, Jacques lui envoie un problème coriace, un résidu de sa thèse de doctorat.

Jamais ils n'ont pensé que ce simple problème d'affectation d'autobus à des trajets, avec flexibilité sur les heures de départ et d'arrivée des véhicules, initialement énoncé dans un contexte de transport scolaire, les ferait autant peiner. Et par la suite, que la résolution de ce problème ferait autant de bruit et mènerait d'abord à la constitution d'une importante équipe de recherche au GERAD (Groupe d'Études et de Recherches en Analyse des Décisions) puis à la création d'AD OPT Technologies, une entreprise montréalaise visant à commercialiser mondialement les résultats de cette recherche universitaire.

2 La préhistoire

Les deux chercheurs principaux, François Soumis et Jacques Desrosiers, ont tous deux un diplôme de maîtrise du département de mathématiques de l'Université de Montréal, en topologie pour le premier (1970), en statistique pour le second (1974). Par la suite, tous les deux ont opté pour des études en mathématiques appliquées par l'entremise de la recherche opérationnelle, cette discipline qui résulte d'un heureux mariage entre les mathématiques et l'informatique.

Il faut d'abord se replacer dans le contexte de l'époque. Nous sommes au milieu des années 70 et le CRT, le Centre de Recherche sur les Transports de l'Université de Montréal, a déjà bonne réputation et il attire depuis cinq ans des chercheurs de partout à travers le monde. Une petite erreur administrative favorise les étudiants en transport : on peut en effet cumuler simultanément les deux bourses d'études des gouvernements du Canada et du Québec ! Une politique boursière qui drainera pendant de nombreuses années les étudiants de mathématiques, d'informatique, de génie, d'économie et même de géographie vers le CRT, en fait, vers la recherche opérationnelle appliquée au vaste domaine du transport.

François Soumis termine sa thèse en 1978 sur un sujet en transport aérien, Jacques Desrosiers termine la sienne en 1979 sur un sujet en transport scolaire. Ils ont tous deux été dirigés par Jacques Ferland et Jean-Marc Rousseau, deux professeurs du département d'informatique et de recherche opérationnelle de l'Université de Montréal. C'est par un pur hasard et quelques détours de parcours professionnels qu'ils se retrouvent collègues au service de l'enseignement des méthodes quantitatives de HEC Montréal, François à titre de chercheur boursier du CRSNG (Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada), Jacques comme professeur en début de carrière. Leurs activités communes se limitent alors au camping sauvage et à la descente des rivières du Québec en canot. L'amitié précède de quelques années les collaborations de recherche.

3 Chemins avec fenêtres de temps

Le problème que Jacques Desrosiers fait parvenir à François Soumis en 1980 prendra rapidement la forme suivante [34]. Soit un graphe $G = (N \cup \{o, d\}; A)$ où l'ensemble des nœuds est donné par N (ensemble de clients), o (dépôt origine) et d (dépôt destination) alors que A représente l'ensemble des arcs. À chaque arc $(i, j) \in A$, on associe un coût c_{ij} et une durée t_{ij} alors qu'à chaque nœud $i \in N \cup \{o, d\}$ on impose un intervalle de temps durant lequel le nœud doit être visité. Le problème consiste à visiter tous les clients avec des itinéraires, une et une seule fois chacun, à moindre coût.

Deux types de variables apparaissent dans la formulation (1)-(6) du problème : des variables binaires X_{ij} , $(i, j) \in A$, prenant la valeur 1 si l'arc correspondant est utilisé dans un chemin, 0 sinon ; des variables de temps $T_i \in [a_i, b_i]$, $i \in N \cup \{o, d\}$, aux nœuds du graphe donnant l'intervalle de temps pour la visite des

nœuds (clients et dépôts).

$$\text{Min} \quad \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} X_{ij} \quad (1)$$

sujet à :

$$\sum_{i \in N \cup \{o\}} X_{ij} = 1 \quad \forall j \in N \quad (2)$$

$$\sum_{j \in N \cup \{d\}} X_{ij} = 1 \quad \forall i \in N \quad (3)$$

$$X_{ij} \text{ binaire} \quad \forall (i, j) \in A \quad (4)$$

$$X_{ij}(T_i + t_{ij} - T_j) \leq 0 \quad \forall (i, j) \in A \quad (5)$$

$$a_i \leq T_i \leq b_i \quad \forall i \in N \cup \{o, d\} \quad (6)$$

Cette formulation est non linéaire, non convexe et ne possède pas de propriétés connues chères aux deux mathématiciens. On remarque la structure de problème d'affectation des premières contraintes (1)-(4), mais les deux dernières sont quelque peu étranges. Les contraintes mixtes $X_{ij}(T_i + t_{ij} - T_j) \leq 0, \forall (i, j) \in A$, sont non linéaires et elles ressemblent aux équations de complémentarité primale-duale de la programmation linéaire. Combinées avec les intervalles de temps en (6), elles imposent que le temps de visite du client j immédiatement après le client i (lorsque $X_{ij} = 1$ et $T_i + t_{ij} \leq b_j$) soit donné par $T_j = \max\{a_j, T_i + t_{ij}\}$, une fonction linéaire par morceaux.

Un premier pas vers la résolution de ce problème est franchi à la suite d'une présentation en génération de colonnes au congrès ORSA/TIMS tenu à Colorado Spring à l'automne 1981. Jacques enseigne alors cette méthode de décomposition [60] dans un cours de recherche opérationnelle au département d'économie de l'Université de Montréal, et plutôt que d'utiliser le problème classique de découpe de rouleaux [47], il a recours à un problème d'itinéraires de véhicules où le réseau est représenté par un graphe acyclique. Le problème maître (7)-(9) est un problème de partition d'ensemble alors que le sous-problème est un plus court chemin entre les dépôts origine o et destination d visitant un sous-ensemble de clients.

$$\text{Min} \quad \sum_{p \in \Omega} c_p \lambda_p \quad (7)$$

sujet à :

$$\sum_{p \in \Omega} a_{ip} \lambda_p = 1 \quad \forall i \in N \quad (8)$$

$$\lambda_p \text{ binaire} \quad \forall p \in \Omega \quad (9)$$

Dans cette formulation du problème maître, Ω représente l'ensemble des chemins admissibles (indexé par p), c_p est le coût du chemin p , et a_{ip} prend la valeur 1 si le chemin p visite le client $i \in N$, 0 sinon. Les variables binaires $\lambda_p, p \in \Omega$ déterminent quels chemins sont utilisés pour visiter tous les clients une et une seule fois.

Pour le problème non linéaire avec flexibilité sur l'horaire (1)-(6) dont on peut faire la décomposition en problème maître et sous-problème, il faut adapter le plus court chemin à la présence des fenêtres de temps, c'est-à-dire résoudre le plus court chemin avec fenêtres de temps (*SPPTW* : *Shortest Path Problem with Time Windows*) [33] qui s'énonce comme suit :

$$\text{Min} \quad \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} X_{ij} \quad (10)$$

sujet à :

$$\sum_{j \in N \cup \{d\}} X_{ij} - \sum_{j \in N \cup \{o\}} X_{ji} = \begin{cases} +1 & i = o \\ 0 & \forall i \in N \\ -1 & i = d \end{cases} \quad (11)$$

$$X_{ij} \text{ binaire} \quad \forall (i, j) \in A \quad (12)$$

$$X_{ij}(T_i + t_{ij} - T_j) \leq 0 \quad \forall (i, j) \in A \quad (13)$$

$$a_i \leq T_i \leq b_i \quad \forall i \in N \cup \{o, d\} \quad (14)$$

Un mois après le retour de la conférence, les deux chercheurs ont déjà en main la première version d'un programme informatique capable de résoudre la relaxation linéaire du problème maître. Il leur faudra toutefois deux autres années pour élaborer un programme numériquement stable capable de résoudre à l'optimalité la version en nombres entiers du problème : le logiciel GENCOL est né, dont le nom est un acronyme de l'expression française *Génération de colonnes*.

Ce programme informatique sur la décomposition de Dantzig-Wolfe [14] comporte trois modules : le logiciel *LANDP* [59] dont on peut modifier au besoin le code source et qui sert à résoudre la relaxation linéaire du problème maître, le générateur de chemins SPPTW et un module fait maison de coupes et de branchements compatibles avec la méthode de génération de colonnes. Les efforts de recherche sont récompensés au congrès EURO VI tenu à Vienne en 1983 où l'on décerne à la petite équipe GENCOL (composée de Martin Desrochers, Jacques Desrosiers et François Soumis) le premier prix pour la meilleure contribution [34]. Dans cet article, on résout des problèmes ayant jusqu'à $|N|=151$ nœuds. Par l'entremise de Gilbert Laporte alors directeur de la recherche, HEC Montréal décerne aux deux jeunes chercheurs le prix *Pierre Laurin 1984* (voir la photographie).

4 Chemins avec contraintes de ressources

En septembre 1983, du statut de programmeur, Martin Desrochers entreprend des études de doctorat sous la supervision de François Soumis. En 1984, Yvan Dumas et Michel Sauvé se joignent à l'équipe qui mène simultanément plusieurs projets, le premier comme étudiant à la maîtrise, le second comme programmeur après avoir complété une maîtrise en mathématiques. Des réunions de travail ont lieu tous les jours. En même temps que l'on améliore la résolution du plus court chemin avec fenêtres de temps SPPTW [23, 24, 28], on identifie une structure mathématique commune à plusieurs problèmes d'itinéraires de véhicules et d'horaires d'équipes de travail [73] :

*Couvrir à coût minimum un ensemble de tâches
(représentées par des nœuds et/ou des arcs sur un réseau)
avec des chemins satisfaisant des contraintes opérationnelles.*

Les conventions de travail des chauffeurs d'autobus étudiées dans la thèse de Martin Desrochers les amènent à considérer des problèmes de plus courts chemins avec plusieurs dimensions : on définit et résout le SPPRC (*Shortest Path Problem with Resource Constraints*) [21, 55], ce qui permet de modéliser toutes les règles d'opération, données par exemple, sur le temps travaillé, le temps de repos, le nombre de tâches effectuées, etc. Il est ainsi facile de concevoir le problème de plus court chemin intégrant à la fois les fenêtres de temps et la capacité des véhicules : c'est le cas particulier que l'on rencontre dans le VRPTW (*Vehicle Routing Problem with Time Windows*) [22, 58, 19].

Mais que dire du PDPTW (*Pickup and Delivery Problem with Time Windows*) étudié dans le mémoire de maîtrise et dans la thèse de doctorat d'Yvan Dumas où chaque tâche est composée d'une origine et d'une destination spécifiques. En plus des fenêtres de temps et de la capacité des véhicules, on ajoute deux contraintes structurelles lors de la construction des chemins : précédence (ramasser avant de déposer) et pairage (les nœuds de ramassage et de livraison d'une tâche sur le même chemin). Un plus court chemin



Figure 1 – Jacques Desrosiers/Gilbert Laporte/François Soumis (1984)

spécifique est développé pour le transport de marchandise [29, 36] alors que dans le contexte du transport des personnes à mobilité réduite où la taille des problèmes dépasse 3000 requêtes par jour dans une grande ville comme Toronto, il faudra aussi faire appel à diverses heuristiques [35, 31, 37, 43]. C'est en fait avec cette application que l'équipe développe une grande partie de son savoir-faire sur les méthodes d'accélération en génération de colonnes [17].

De manière générale, les problèmes d'itinéraires et d'horaires peuvent être formulés à l'aide de modèles de flot multi-commodités, non linéaires et entiers, avec des contraintes liantes et des variables de ressources [30, 16]. Les commodités représentent les types de véhicules ou d'équipages. La structure de flot de chaque commodité définit un chemin élémentaire sur un réseau espace-temps ; les arcs représentent diverses activités (déplacements productifs tels des vols, déplacements à vide, pauses et repas, etc.) alors que les nœuds sont des lieux à des temps spécifiques. Les contraintes liantes imposent la couverture de tâches : clients, vols, segments de train, trajets d'autobus ou de navires, rotations des pilotes, etc. Elles peuvent également être associées au nombre de véhicules, d'équipages, de crédits disponibles aux dépôts et aux bases. Les ressources servent à modéliser les restrictions locales sur un seul chemin à la fois. Elles sont cumulées sur les arcs du chemin, vérifiées et mises à jour aux nœuds, en pratique par des fonctions d'extension linéaires et non linéaires [54]. On exploite la structure de ces modèles avec des méthodes de décomposition mathématique.

5 Air France et GIRO : des contrats industriels

En 1984 et 1985, les deux chercheurs collaborent avec Michel Minoux pour leur premier contrat industriel d'envergure. La méthode de génération de colonnes est utilisée pour résoudre les problèmes de rotations des équipages chez Air France. Sylvie Lavoie se joint à l'équipe et travaille sur place pendant que Jacques Desrosiers, en année sabbatique, séjourne au Centre National d'Études des Télécommunications à Issy-les-Moulineaux, en banlieue de Paris. Comme ses appels outre-mer sont gratuits, Jacques communique avec François à chaque semaine pour faire le point sur le projet. Le problème maître est encore une fois donné par un problème de partition d'ensemble avec quelques contraintes additionnelles sur la composition des rotations alors que le choix du générateur s'est arrêté sur un problème de plus court chemin classique sur un graphe acyclique où l'on a représenté par des nœuds tous les états possibles des rotations partielles [66]. La recherche sur le plus court chemin avec contraintes de ressources avance bien dans la thèse de doctorat de Martin Desrochers mais le programme informatique n'est pas suffisamment au point pour être utilisé dans une application industrielle. Le logiciel GENCOL évolue mais reste encore un produit universitaire : tout est écrit en FORTRAN, l'équipe utilise (et vend également) *XMP*, l'optimiseur développé par Roy Marsten [63], et la résolution des problèmes se fait sur un ordinateur central.

En 1987, après sept ans de travaux de recherche, un mémoire de maîtrise et deux thèses de doctorat, la migration en 1984 de François Soumis vers l'École Polytechnique de Montréal où il occupera un poste de professeur, l'équipe GENCOL est mûre pour un deuxième développement commercial.

Pendant deux ans, de 1988 à 1990, trois systèmes sont développés sur PC pour la firme montréalaise GIRO : BUS-OPT en transport scolaire [34], CREW-OPT en transport urbain [21, 25, 27], et DARSY pour le transport des personnes handicapées [31]. Sans dénombrer les étudiants, l'équipe GENCOL compte alors deux professeurs (François et Jacques), deux chercheurs postdoctoraux (Martin et Yvan) et, avec la venue de Johanne Gilbert, Margaret Maclure, Brigitte Rioux, Serge Taillefer et Pierre Girard, cinq nouveaux analystes qui font équipe avec Michel Sauvé. Avant même la fin de ce contrat de R&D, une première installation de CREW-OPT se fait à Lyon pour la confection des horaires des chauffeurs d'autobus ; la ville de Toulouse suivra deux années plus tard. Jean-Marc Rousseau, l'un des fondateurs de GIRO, a été un visionnaire dans ce projet. Il a senti le potentiel de la méthode de génération de colonnes dans le contexte des horaires de chauffeurs d'autobus [72].

6 Un peu de chance ne peut pas nuire

L'équipe GENCOL a été chanceuse dans cette première décennie de recherche en génération de colonnes. Tous les réseaux espace-temps utilisés dans les applications très complexes comme la confection des horaires de chauffeurs d'autobus ou de pilotes d'avions sont *acycliques*. Les algorithmes de plus courts chemins, même avec des contraintes de ressources, sont exacts. Ce n'est pas le cas ni pour le transport scolaire ni pour le transport des personnes handicapées. Par contre, on sait éliminer les cycles de deux tâches $i \rightarrow j \rightarrow i$ et en pratique, il y a très peu de cycles plus longs dans les deux applications précédentes. Ainsi, pour le PDPTW dont les nœuds de ramassage et de livraison sont respectivement identifiés par des + et des -, puisque l'arc $i^- \rightarrow i^+$ n'existe jamais, un cycle de deux tâches requiert la visite d'au moins cinq nœuds, c'est-à-dire la longue séquence $i^+ \rightarrow i^- \rightarrow j^+(\neq i^+) \rightarrow i^+ \rightarrow i^-$ qui n'est pas commune lorsque les fenêtres de temps sont petites en comparaison des temps de transport [29].

Il en va tout autrement lorsque vient le temps de résoudre le VRPTW, au début des années 90. Les premiers résultats de l'équipe pour cette *application académique* sont certes intéressants, mais ils montrent clairement les limites de la méthode proposée [22]. La plupart des problèmes de 100 clients sont trop difficiles et l'on doit en réduire la taille en utilisant des sous-ensembles de 50 et de 25 clients. Seulement 50 des 87 problèmes tests peuvent être résolus à l'optimalité. Au fil des ans, les chercheurs développeront de nombreuses coupes pour améliorer la valeur de la borne inférieure donnée par la relaxation linéaire du problème de partition d'ensemble, mais c'est surtout avec la construction de plus courts chemins élémentaires que les résultats se sont fondamentalement améliorés [44, 55, 9, 56, 79, 57].

7 Le financement de l'équipe GENCOL

Au début des années 90, les subventions de recherche individuelles de François et de Jacques ne suffisent pas pour supporter l'équipe qui grossit encore avec la venue de nouveaux étudiants de maîtrise et de doctorat. Après le projet GIRO, ils concluent à nouveau une entente industrielle avec Air France [15], ce qui leur permet de respirer pour quelques années. Mais il faut voir plus loin, . . . et même plus haut. Ils suivront en fait l'exemple de GIRO et créeront en 1993 la société AD OPT Technologies dans le but de commercialiser leurs résultats de recherche en transport aérien. Au total, l'équipe GENCOL disposera de 5.5\$ millions sur 5 ans, de 1993 à 1998, pour le projet *Altitude* financé par les gouvernements du Canada et du Québec ainsi que par la toute jeune entreprise. Durant cette période, l'équipe est bien installée au GERAD, un regroupement de professeurs-chercheurs de HEC Montréal, l'École Polytechnique de Montréal, l'Université McGill et l'Université du Québec à Montréal. L'équipe supporte environ trente personnes par année : professeurs, chercheurs postdoctoraux, étudiants de maîtrise et de doctorat, et analystes en informatique aux compétences variés. Le salaire des professeurs est payé par l'institution d'appartenance mais les autres dépenses en salaires, bourses, équipements et conférences sont payées à même les subventions de recherche. En fait, pendant environ 15 ans, l'équipe bénéficiera de plus d'un million de dollars par an pour ses projets de recherche.

La politique gouvernementale de financement est relativement simple. Pour obtenir des sommes importantes, les grands organismes subventionnaires posent en fait trois questions :

1. *Est-ce que l'équipe de recherche est capable de réaliser le projet soumis ?*
L'équipe GENCOL a bonne réputation et les centres CRT et GERAD possèdent un environnement de recherche adéquat.
2. *Y a-t-il un partenaire apte à financer une partie du projet et intéressé à prendre en charge tous les aspects de la commercialisation ?*
AD OPT et GIRO sont naturellement des partenaires tout désignés.
3. *Y a-t-il un client qui veut acheter le produit final ?*
Les clients potentiels s'engageaient également à fournir les données essentielles à la définition et à la réalisation du projet.

Les gouvernements du Canada et du Québec sortent tout à fait gagnants du partenariat de recherche universités-industries de l'équipe GENCOL. Actuellement, et ce depuis déjà plusieurs années, GIRO et AD OPT avec leurs employés respectifs, payent en impôts à *chaque année* plus que tout ce que l'équipe a reçu en subventions depuis 30 ans. C'était un très bon investissement.

8 La commercialisation, pas aussi simple...

Au début de la seconde décennie, les résultats des tests réalisés auprès de plusieurs compagnies aériennes sont excellents, souvent exceptionnels, mais les contrats se font rares. La compagnie de vols nolisés Air Transat devient le premier client d'AD OPT en transport aérien et elle commande trois systèmes [32] : un premier pour les rotations des équipages (*Pairing Problem*), un second pour les itinéraires des avions (*Aircraft Assignment*) et un troisième pour les horaires (blocs) mensuels (*Rostering Problem*). Vient en second UPS avec son immense flotte d'avions qui achète le système pour les rotations de ses équipages.

Dans le domaine du logiciel en transport aérien, la compétition est très forte à cette époque et les partenariats très solides : IBM est installé chez American Airlines, AT&T chez Delta, Unisys chez British Airways et United Airlines, et enfin Volvo est avec SAS et Lufthansa. Les compagnies aériennes achètent certes des logiciels d'optimisation mais c'est surtout le savoir-faire et l'expertise de leurs fournisseurs qui les intéressent. Toutes les compagnies aériennes rencontrent à un moment ou un autre des difficultés dans leurs opérations au quotidien ; il faut devenir des experts capables de répondre à leurs besoins. AD OPT doit monter une équipe solide non seulement pour la recherche et le développement des produits, mais aussi pour la vente, l'entretien, la formation et le service après vente. La nouvelle compagnie n'a pas un nom prestigieux, ni les ressources informatiques et financières de la compétition. Elle a simplement accès à de meilleures mathématiques par l'intermédiaire des chercheurs du GERAD, et cela ne suffit pas à s'imposer sur ce marché très compétitif.

Pour jouer avec les grands, il faut être grand.

Ou le devenir. Encore une fois, la chance sourit. À la fin de l'année 1993, les compagnies Renault et Volvo sont en négociation pour fusionner leurs activités. Tout ce qui n'est pas du domaine de l'automobile est à vendre. Chez Volvo, on cherche un acheteur pour la division Carmen Systems. C'est une occasion à saisir (au vol). Avec du capital de risque provenant de cinq sources, trois du Québec, une d'Amsterdam et l'autre de New York, la transaction est conclue en quelques mois, avec l'accord nécessaire et très important de SAS et de Lufthansa qui deviennent par le fait même les clients d'AD OPT. La nouvelle entreprise se positionne ainsi sur le plan international.

9 La recherche fondamentale

La recherche fondamentale est omniprésente dans le parcours de l'équipe GENCOL. Les problèmes posés par l'industrie sont importants, difficiles et recèlent toujours une part de défis mathématiques et informatiques que l'équipe a toujours relevés au meilleur des connaissances de ses membres. Au milieu de la seconde décennie paraît un article de plus de cent pages qui contient l'ensemble des connaissances mathématiques de l'équipe sur les problèmes de confection d'itinéraires de véhicules et d'horaires d'équipes de travail [30]. La rédaction d'un tel article a permis de faire le point sur ce qui était déjà fait et sur ce que l'on pensait réaliser dans les années à venir. Trois années plus tard, avec la collaboration de Guy Desaulniers qui s'est joint à l'équipe, un second article complète le premier [16]. Spécifiquement dédié à des applications d'itinéraires de véhicules et de confection d'horaires d'équipes de travail résolues par génération de colonnes, ce deuxième article synthèse décrit les structures fondamentales de ces problèmes et les interactions qu'elles ont entre elles.

Les avancées majeures dans la résolution des problèmes industriels complexes auxquels l'équipe a dû faire face ont été réalisées principalement grâce à la programmation dynamique, la méthode largement utilisée au cœur des générateurs d'itinéraires et d'horaires admissibles. Il s'agit en fait d'une méthode intelligente d'énumération de toutes les possibilités qui permet d'éliminer les chemins partiels dominés. Dans les applications mentionnées précédemment, elle permet de gérer adéquatement les règles des conventions de travail, règles qui sont mathématiquement souvent représentées par des fonctions non linéaires, non convexes, et même discontinues. À cet égard, on se rappellera que les conventions de travail des pilotes d'avions ne sont pas écrites par des mathématiciens mais bien par des avocats !

La généralisation du plus court chemin aux contraintes de ressources modifie les deux contraintes initialement associées aux fenêtres de temps pour incorporer ce que l'on nomme une fonction d'extension $f_{ij}^r(T_i^r)$ du nœud i au nœud j , où $r \in R$ est une ressource :

$$X_{ij}(f_{ij}^r(T_i^r) - T_j^r) \leq 0 \quad \forall (i, j) \in A, \forall r \in R \quad (15)$$

$$a_i^r \leq T_i^r \leq b_i^r \quad \forall i \in N \cup \{o, d\}, \forall r \in R \quad (16)$$

Au nœud j , la ressource r se calcule comme $T_j^r = \max \{a_j^r, f_{ij}^r(T_i^r)\}$ lorsque $X_{ij} = 1$ et $f_{ij}^r(T_i^r) \leq b_j^r$. Elle dépend de la valeur de la même ressource r au nœud précédent. Les deux collaborateurs ont longtemps cherché des propriétés mathématiques aux fonctions d'extension : continuité, convexité ou quasi-convexité, etc. Finalement, une propriété suffisante pour l'élimination des chemins partiels dominés est que la fonction soit tout simplement *non décroissante* [16].

Quelques exemples montrent la flexibilité de ces fonctions d'extension : la version classique $f_{ij}(T_i) = T_i + t_{ij}$ où la ressource augmente ; la version équivalente à la précédente $f_{ij}(T_i) = T_i - t_{ij}$ avec pente unitaire positive où la ressource diminue (on peut penser à la charge d'un véhicule qui augmente dans le premier cas alors que l'espace disponible diminue dans le second) ; la fonction constante $f_{ij}(T_i) = a_j$ souvent utilisée en transport aérien pour remettre à jour une ressource au début d'une nouvelle journée de travail d'une rotation de plusieurs jours ; les fonctions $\min\{x, y\}$ et $\max\{x, y\}$ sont également non décroissantes. Enfin, on notera que la composition de fonctions non décroissantes produit une fonction non décroissante, par exemple, la fonction $T_j^r = \max \{a_j^r, f_{ij}^r(T_i^r)\}$.

On peut faire encore mieux en observant que la fonction de coût peut être considérée comme une ressource et qu'elle dépend souvent, dans les applications complexes, de plusieurs ressources : ainsi, le coût d'une rotation

dépend du nombre de jours de la rotation, de nombre d'heures travaillées, du nombre d'heures en fonction, etc. La fonction d'extension de i à j peut ainsi dépendre du vecteur de ressources $\vec{T}_i = (T_i^r)_{r \in R}$ au nœud i et les contraintes précédentes prennent alors la forme suivante :

$$X_{ij}(f_{ij}^r(\vec{T}_i) - T_j^r) \leq 0 \quad \forall (i, j) \in A, \forall r \in R \quad (17)$$

$$a_i^r \leq T_i^r \leq b_i^r \quad \forall i \in N \cup \{o, d\}, \forall r \in R \quad (18)$$

Cette souplesse dans la définition des ressources et des fonctions d'extension est très certainement l'élément clé dans la modélisation des conventions de travail et dans le traitement mathématique qui en découle dans le logiciel d'optimisation, et par le fait même du succès de l'équipe GENCOL. Quant au logiciel d'optimisation du même nom, il code essentiellement la formulation multi-flot du second article synthèse [16] où l'on définit un réseau et un flot unitaire spécifiques à chaque véhicule et/ou personne pour lesquels on cherche à construire les itinéraires ou les horaires de travail. Une modélisation tout à fait adéquate lorsque l'on pense aux horaires de travail de 10 000 agents bord qui ont chacun leurs qualifications particulières ainsi que leurs *desiderata* personnels à chaque mois. Il en résulte un schéma de génération de colonnes avec un problème maître aux allures de problème de recouvrement généralisé (avec un membre droit donné par un vecteur d'entiers positifs) et 10 000 sous-problèmes permettant de générer un choix d'horaires spécifiques à chaque employé [45].

Au fil des ans, l'équipe a cherché à améliorer chacun des modules principaux : plus courts chemins de toutes sortes [33, 23, 24, 29, 26, 53, 80, 55, 56, 67], spécialisés selon le nombre de ressources et la structure acyclique ou non du graphe sous-jacent ; accélération de la résolution du problème maître en s'inspirant très largement des astuces utilisées dans la méthode primale du simplexe (la génération de colonnes en est fondamentalement une extension) [17] ; heuristiques de toutes sortes pour l'obtention de solutions entières de qualité [31, 45, 17]. En même temps, l'écriture des articles synthèse permet de mieux comprendre les mécanismes de cette méthode de décomposition, notamment celui qui permet d'associer à tout schéma de génération de colonnes (problème maître et sous-problème) une formulation équivalente dite compacte sur laquelle on peut appliquer le mécanisme de décomposition et retrouver le même tandem [81]. C'est la pierre d'assise des stratégies de coupes et de branchements basées sur la formulation compacte et compatibles avec la méthode de génération de colonnes [16].

10 Transferts technologiques à GIRO et AD OPT

Pour les projets coopératifs université-industrie, la recherche fondamentale se fait en premier lieu par les membres de l'équipe et par les nombreux chercheurs qui travaillent au GERAD. Un exemple type est celui des horaires mensuels pour les pilotes et agents de bord en transport aérien. Le projet débute en 1990 avec l'étudiant de doctorat Michel Gamache. Les données sont fournies par deux compagnies aériennes, d'abord par Air France puis par Air Canada, par l'entremise d'AD OPT qui finance une partie de cette recherche. Divers modèles mathématiques sont élaborés, ainsi que des algorithmes de résolution. Les tests sont effectués avec le support des programmeurs de l'équipe GENCOL pour la calibration des paramètres de l'optimiseur. La thèse de Michel est déposée en 1995 et deux de ses articles se méritent le *Prix de la meilleure application de la recherche opérationnelle* décerné par la Société canadienne de recherche opérationnelle, en 1994 avec la participation d'Air France [45] et en 1996 avec la participation d'Air Canada [46]. Le transfert technologique université-industrie se fait non seulement en remettant les documents et codes informatiques pertinents à AD OPT mais aussi en transférant en tout ou en partie l'équipe de programmeurs affectés à ce projet (un schéma semblable de transfert technologique avait déjà été utilisé lors du développement des systèmes de GIRO). De son côté, Michel Gamache deviendra chercheur postdoctoral au GERAD puis décrochera un poste de professeur à l'École Polytechnique de Montréal en 1997. Il codirigera par la suite d'autres étudiants qui feront évoluer son domaine de recherche initial [1].

Durant la seconde décennie, AD OPT financera ainsi de nombreux projets : élaboration des rotations de pilotes et d'agents de bord [32], attribution des blocs mensuels [32, 46], affectation des types d'avions et routage de ces derniers [18], ré-optimisation des itinéraires des avions et des horaires des équipages à la suite de perturbations aux horaires [76, 75], affectation des locomotives et des wagons en transport ferroviaire [10, 62], etc.

Le fait de travailler simultanément sur des données provenant d'environnements différents est un avantage : il permet de couvrir une problématique mathématique beaucoup plus large. Ainsi, en travaillant à la fois dans les domaines du transport scolaire, urbain, aérien et ferroviaire, l'équipe a profité de la similitude des structures pour accélérer la recherche. Ont ainsi été menées en parallèle, les recherches de modèles et d'algorithmes pour les problèmes de rotations d'agents de bord en transport aérien [45] et d'affectation des locomotives en transport de marchandises [82, 83]. Les problèmes sont très différents, notamment parce que la demande de puissance est exprimée en chevaux-vapeur dans le domaine ferroviaire, mais dans les deux cas, la couverture des tâches (vols en aérien et trains en ferroviaire) nécessite un nombre entier (généralement supérieur à un) d'agents de bord ou de locomotives. Les meilleures idées de chaque groupe étaient soumises à l'analyse et l'expérimentation par l'autre groupe, ce qui créait une saine concurrence à l'intérieur de l'équipe GENCOL.

En 1997, la compagnie AD OPT compte déjà 50 employés dont plusieurs ont complété leurs études de maîtrise ou de doctorat sous la direction de François Soumis et de Jacques Desrosiers. Cette année-là, la reconnaissance de leurs travaux en transport urbain et aérien est soulignée par trois prix majeurs de transfert technologique, non pas à une, mais aux deux entreprises montréalaises AD OPT et GIRO : la *Médaille J.-Armand Bombardier* dédiée à l'Innovation Technologique et décernée par l'ACFAS (mai, Montréal) ; le prix *Transfert* décerné par l'ADRIQ (septembre, Montréal) ; le prix d'*Excellence en partenariats innovateurs Université-Industries* décerné par le CRSNG et le Conference Board of Canada (octobre, Vancouver).

GIRO compte maintenant plus de 250 installations du système HASTUS pour la fabrication des horaires de chauffeurs d'autobus (Tokyo, Helsinki, Singapour, New York, Chicago...) alors qu'AD OPT dépasse les 30 installations dans les domaines aérien et ferroviaire (Air Canada, Air Transat, Quantas, FlexJet (Bombardier), UPS, Fedex, Atlas, Cargolux, Emirates, United, Via Rail...).. En 1999, AD OPT est inscrite à la bourse de Toronto, puis devient une division de Kronos en 2004. En 2008, elle compte 200 employés avec un chiffre d'affaires annuel dépassant 30 millions. AD OPT est présente dans 400 hôpitaux à travers le monde, dans les trois casinos du Québec, les postes de péage en France, chez un important constructeur automobile (japonais) aux USA, etc. Environ 500 000 membres d'équipage, planificateurs et managers utilisent le produit des recherches découlant des travaux de l'équipe GENCOL, à tous les jours dans le monde.

11 GENCOL : un logiciel d'optimisation

La version universitaire intégrant le module de programmation linéaire *XMP* a servi de base pour la première version commerciale GENCOL 1 développée de 1988 à 1990 pour les trois systèmes de GIRO. Avec le projet suivant en partenariat avec Air France, une nouvelle version est élaborée, toujours en langage Fortran. C'est avec cette version qu'est effectué pour GIRO un test sur des données provenant d'une société de transport de Tokyo. Le problème est très gros et les dispatchers sont incapables de satisfaire toutes les règles. L'optimiseur GENCOL améliore par 15 % les solutions manuelles tout en satisfaisant toutes les contraintes imposées par la convention de travail. GIRO décrochera le contrat et fera par la suite une percée sur le marché asiatique.

Vient ensuite la version hybride en Fortran et en C qui intègre dans GENCOL 3 l'optimiseur *CPLEX*. Une semaine après la fin de l'écriture de cette version encore toute chaude, les trois architectes de l'optimiseur au GERAD, soit Éric Gélinas, Norbert Lingaya et Daniel Villeneuve, repensent la structure du programme, mais cette fois-ci en langage C. GENCOL 4 sera la version commerciale utilisée à la fois par GIRO dans son produit vedette HASTUS pour la construction des horaires de chauffeurs d'autobus et par AD OPT dans la suite de produits ALTITUDE en transport aérien et pour des produits commercialisés dans d'autres domaines.

Cette version est encore utilisée au GERAD et elle est suffisamment flexible pour supporter la recherche et les développements théoriques des dernières années en génération de colonnes, notamment sur la résolution de problèmes à deux niveaux (et plus!), sur les coupes dérivées du problème maître, sur les méthodes de stabilisation primale-duale et sur l'agrégation de contraintes pour les problèmes de partition d'ensemble. Ces sujets sont abordés dans les sections suivantes.

12 Des problèmes à deux niveaux

La troisième décennie est fortement marquée par un retour à la recherche fondamentale. Les nouvelles idées sont encore testées en contexte d'applications, soit pour résoudre des problèmes toujours plus complexes, soit pour améliorer les temps de calcul par une meilleure connaissance des propriétés mathématiques de nos modèles.

Depuis longtemps, le processus de planification des décisions en transport aérien se fait de manière séquentielle : vols à offrir, plages horaires, choix de la flotte, routage des avions, rotations des équipages, blocs mensuels. Chacun de ces problèmes est assez complexe pour se mériter une attention particulière lors de la planification, sans que le temps requis pour l'optimisation ne soit une contrainte bien stricte. Lorsqu'il y a perturbation des activités à la suite d'un bris d'équipement, d'une absence ou d'un arrêt des opérations à cause d'un violent orage ou d'une tempête de neige, on se doit de ré-optimiser les décisions tout en gardant une vue d'ensemble des interactions entre les divers modules. De plus, le temps est compté car il faut rapidement reprendre le cours normal des opérations planifiées.

À partir du milieu des années 90, plusieurs projets à deux niveaux ont vu le jour, par intérêts théoriques pour certains, par intérêts commerciaux pour d'autres. Une liste non exhaustive se lit comme suit : recouvrement des opérations à la suite d'une perturbation majeure [76]; choix de la flotte, routage des avions et détermination des horaires de vol et de maintenance [64, 65]; itinéraires des avions et rotations des équipages [13, 75]; itinéraires d'autobus et horaires des chauffeurs [48]; affectation des locomotives et des wagons en transport de marchandises [12, 10]; etc.

Pour un problème à deux niveaux comme celui des itinéraires d'avions et des rotations d'équipages, on fait appel à la décomposition de Benders [8]. Cette méthode utilise un problème maître en nombres entiers au niveau supérieur (itinéraires d'avions) et un sous-problème linéaire au niveau inférieur (rotations d'équipages). Le tout est intégré à un arbre de branchements aux stratégies largement heuristiques afin de déterminer de bonnes solutions entières. Misant sur l'expertise de l'équipe, le niveau supérieur est résolu par génération de colonnes (avec arbre de branchements et coupes) tout comme le niveau inférieur. Le nouvel optimiseur utilise ainsi simultanément les décompositions de Benders et de Dantzig-Wolfe.

Plusieurs nouvelles idées ont été introduites pour traiter efficacement les problèmes en nombres entiers par décomposition de Benders. On sait que l'on peut relaxer l'intégrité du problème maître pour générer plus rapidement les premières coupes de Benders et réintroduire graduellement les contraintes d'intégrité au cours des itérations de Benders, ce qui permet de réduire fortement le temps de résolution [11, 13, 64, 50]. Une idée contre-intuitive a aussi été mise de l'avant pour obtenir l'intégrité des sous-problèmes : des branchements sur les variables du problème maître [51]. Cette idée qui est basée sur de nouveaux résultats théoriques est la première méthode efficace pour obtenir l'intégrité des variables des sous-problèmes pour les problèmes de grande taille. Elle est bien adaptée pour une large classe de problème où la décomposition de Benders est efficace si on relaxe l'intégrité des sous-problèmes : un problème maître modélisant le design d'un système et un ou des sous-problèmes correspondant à l'opération de ce système. Des branchements sur les variables de design qui ont beaucoup d'effets sur le coût produisent un arbre de branchement beaucoup plus petit que des branchements sur les variables des sous-problèmes qui sont beaucoup plus nombreuses et ont moins d'impact sur les coûts.

13 Bombardier Flexjet : un tour de force

Durant trois années, de 2000 à 2003, les équipes du GERAD et d'AD OPT ont collaboré à la conception et la réalisation d'un système d'optimisation pour la division Flexjet de Bombardier. Flexjet est le programme clés en main de copropriété d'avions d'affaires de Bombardier. Il permet d'acheter des parts d'un avion Bombardier (par tranche de 1/16e équivalant à 50 heures de vol), à une fraction du prix qu'il en coûterait pour en faire l'acquisition. Flexjet se charge de l'équipage, de la maintenance de l'appareil, des hangars, du carburant, des assurances, etc. Avec aussi peu que quatre heures d'avis, les clients ont accès à plus de 5000 aéroports en Amérique du Nord ; avec 48 heures d'avis, ils peuvent se déplacer partout dans le monde (www.flexjet.com).

En premier lieu, les équipes du GERAD et d'AD OPT ont proposé une réingénierie du processus d'affaires : il a été modifié en faisant d'abord l'affectation des blocs mensuels. En second lieu, un système d'optimisation intégrant simultanément quatre niveaux a été réalisé : choix du type d'appareil et des horaires de vols ainsi que des itinéraires d'avions et des horaires des équipages.

Les opérations étant essentiellement du type *taxis volants*, les blocs mensuels ne servent qu'à déterminer les jours de travail et de congé sans qu'il ne soit nécessaire d'en connaître les activités précises. Pour le système intégrant quatre niveaux, il a fallu un an de R&D pour en réaliser une première version. La taille des problèmes à résoudre étant petite en comparaison des problèmes de l'industrie aérienne classique, une centaine d'avions et de pilotes et quelques centaines de vols par jour, une méthode de résolution par génération de colonnes s'avère mathématiquement adéquate. Le temps de calcul est par contre astronomique : 10h cpu alors que Flexjet impose au plus trente minutes en planification. Quelques mois suffiront à mettre au point une version finale satisfaisant aux exigences du client ainsi qu'une version de ré-optimisation en cours d'opérations ne requérant que cinq à dix minutes de temps de calcul. Un petit chef d'œuvre ayant été présenté en 2004 à la compétition d'INFORMS à Boston, le *Franz Edelman Award for Achievement in Operations Research and the Management Sciences* [52].

14 Coupes dérivées du problème maître

Dès le début des recherches de l'équipe GENCOL en génération de colonnes, il a été montré comment utiliser des coupes provenant de la formulation originale ou compacte [34, 16]. Les coupes ont ensuite été élaborées pour diverses applications, généralement au niveau des contraintes liantes de la formulation compacte [22, 71, 58, 56, 49] mais aussi directement au niveau du sous-problème [46, 80, 1]. Depuis quelques années, on a toutefois vu apparaître des exemples de coupes dérivées à partir des variables du problème maître, mais spécifiques à certaines applications (coloration de graphe [68], découpe [2, 3] et VRPTW [57, 70, 74]).

L'article [20] formalise de manière générale les coupes utilisées pour la résolution de programmes en nombres entiers résolus par génération de colonnes. Les inégalités valides peuvent être écrites en termes des variables du sous-problème (les mêmes que celles d'une formulation compacte équivalente) ou en termes des variables du problème maître. Dans le premier cas, les coupes sont ajoutées à la formulation compacte, au niveau du problème maître ou au niveau du sous-problème, et le processus de décomposition Dantzig-Wolfe est appliqué à nouveau. Dans le second cas, il est possible de modéliser les inégalités définies en termes des variables du problème maître en ajoutant de nouvelles variables et des contraintes non linéaires à la formulation du sous-problème. Le sous-problème augmenté révèle indirectement qu'il existe une formulation compacte augmentée qui inclut ces nouvelles variables et ces contraintes non linéaires, ce qui requiert parfois l'élaboration de nouveaux algorithmes pour la résolution du sous-problème.

15 Stabilisation primale-duale

La décomposition de Dantzig-Wolfe en programmation linéaire est connue pour sa convergence très lente, ce qui lui a d'ailleurs valu d'être abandonnée au début des années 70. Son utilisation intelligente par l'équipe GENCOL pour la résolution d'une classe importante de problèmes en nombres entiers lui a redonné ses lettres de noblesse. Le phénomène de queue observé (*tailing-off effect*) est dû en partie à la dégénérescence primale des solutions du problème maître. Dans nos applications, lorsque les itinéraires de véhicules ou les horaires d'équipes de travail couvrent en moyenne dix tâches, une solution entière du problème de partition d'ensemble est dégénérée à 90 %. La dégénérescence primale augmente à 95 % si les colonnes couvrent en moyenne vingt tâches. Après avoir utilisé pendant près de 20 ans des méthodes classiques de perturbation du membre droit du problème maître, deux nouvelles approches ont été étudiées pour mieux construire la matrice de base de l'algorithme de simplexe : la stabilisation primale-duale et l'agrégation de contraintes des problèmes de partition d'ensemble.

L'équipe a développé une méthode de stabilisation des variables duales pour la génération de colonnes. Elle reprend certaines idées des méthodes de faisceaux [61] mais elle a l'avantage d'être complètement linéaire [38, 4, 5]. L'une de ses particularités est qu'elle peut combiner à la fois les informations primales (une

solution de départ approximative) et duales (une bonne estimation ou des propriétés connues [7]) et ainsi profiter des heuristiques développées à ces deux niveaux pour des problèmes spécifiques. Nous avons également observé qu'en génération de colonnes, les fondements algorithmiques des méthodes d'agrégation/désagrégation dynamique des contraintes sont sensiblement les mêmes que ceux développés pour la stabilisation des variables duales.

En bref, dans la méthode de stabilisation, on cherche à remplacer les variables de base nulles par leur équivalent en terme de variables d'écart et d'excédent qui supportent l'information duale sous forme de bornes inférieure et supérieure. La forme stabilisée du problème maître (7)-(9) énoncé précédemment est la suivante :

$$\text{Min} \quad \sum_{p \in \Omega} c_p \lambda_p - \sum_{i \in N} d_{1i} y_{1i} + \sum_{i \in N} d_{2i} y_{2i} \quad (19)$$

sujet à :

$$\sum_{p \in \Omega} a_{ip} \lambda_p - y_{1i} + y_{2i} = 1 \quad \forall i \in N \quad (20)$$

$$\lambda_p \text{ binaire} \quad \forall p \in \Omega \quad (21)$$

$$0 \leq y_{1i} \leq \varepsilon_{1i}, 0 \leq y_{2i} \leq \varepsilon_{2i} \quad \forall i \in N \quad (22)$$

L'information sur les variables duales est donnée sous forme d'intervalles $d_{1i} \leq \pi_i \leq d_{2i}$, $i \in N$ alors que les variables d'écart (y_{2i}) et d'excédent (y_{1i}) sont bornées supérieurement, comme dans les méthodes de perturbation du membre droit. Lorsque ces variables additionnelles sont dans la base, celle-ci devient plus creuse et les pivots sont plus rapides. Ce résultat est d'autant plus vrai lorsque le problème à résoudre est particulièrement dégénéré. Nous observons alors une réduction marquée du nombre d'itérations de génération de colonnes par ce contrôle du comportement des variables duales. Dans nos tests, le temps de calcul est réduit par un facteur 10 [69]. Nous avons également utilisé cette méthode avec beaucoup de succès par comparaison avec *CPLEX* dans une phase de *crossover* originale et simple entre une solution optimale intérieure et une solution optimale de base [6]. À partir de la solution optimale donnée par *CPLEX*, il est en effet possible d'utiliser une information parfaite sur la valeur optimale des variables duales.

16 Agrégation de contraintes

La motivation originale pour l'agrégation de contraintes des problèmes de partition d'ensemble provient d'applications en transport. On sait tous, par exemple, que même si on peut remplacer un chauffeur d'autobus environ aux quinze minutes (aux points de relève), celui-ci reste dans son véhicule pour une beaucoup plus longue période. D'autre part, sur la suite de vol effectué par un même avion, par exemple Montréal-Toronto-Calgary-Vancouver, il est normal que ce soit le même pilote qui demeure aux commandes de l'avion d'un bout à l'autre de l'itinéraire. On comprend ainsi que si l'on fait une agrégation judicieuse des tâches à accomplir, on peut facilement réduire par un facteur trois le nombre de contraintes de couverture de tâches, ce qui entraîne en pratique une réduction par 10 du temps de calcul du problème maître en génération de colonnes.

Dans la méthode d'agrégation dynamique des contraintes, les variables de base nulles sont tout simplement éliminées de la base, temporairement. Cela donne lieu à des redondances au niveau des rangées de la matrice de base, ce qui permet de réduire la taille du système de contraintes. Les pivots agrégés deviennent ainsi particulièrement rapides au niveau du problème maître [42]. Il faut par contre déduire les variables duales pour chacune des contraintes originales afin de générer adéquatement les nouvelles colonnes. Si on applique également la même agrégation au niveau du sous-problème, on obtient encore une réduction appréciable [39]. Enfin, les problèmes de partition ayant moins de contraintes dans leur version agrégée, ils sont naturellement plus entiers, ce qui facilite l'exploration de l'arbre de branchement. En bout de ligne, on obtient une réduction globale de deux ordres de grandeur, soit un facteur d'accélération de 100 [41].

Cette approche est donc beaucoup plus efficace en présence d'une forte dégénérescence, ce qui est habituellement considéré comme une difficulté majeure en programmation linéaire. On peut donc maintenant exploiter ce défaut ... transformé en qualité.

17 IPS : an Improved Primal Simplex

Après avoir développé l'agrégation dynamique de contraintes pour les problèmes de partition d'ensemble et obtenu des gains importants au niveau des temps de calcul, un pas de plus est fait avec la généralisation aux problèmes de programmation linéaire. La dégénérescence, considérée depuis 60 ans comme une difficulté majeure lors de la résolution des problèmes linéaires, peut être avantageusement exploitée : comparé à la performance de *CPLEX*, on observe un facteur d'accélération de 2 à 10 pour un ensemble de problèmes tests de grande dimension de la librairie Mittelman [78].

Intuitivement, plutôt que d'explorer les bases dégénérées d'un point extrême, on remplace ces dernières par une seule base représentative en éliminant les variables nulles et en agrégeant les contraintes linéairement dépendantes entre elles, réduisant ainsi la taille du système de contraintes. L'optimisation se fait alors sur un problème réduit, d'une base agrégée à une autre. À l'optimalité du problème réduit, il faut faire le pricing des variables temporairement éliminées. On démontre alors que, soit la solution de la version réduite est une solution optimale au problème initial, soit il existe une combinaison convexe des variables éliminées qui garantit une amélioration stricte de l'objectif. De plus, en utilisant une définition plus générale pour les variables dégénérées, c'est-à-dire des variables à leurs bornes inférieure ou supérieure, les résultats sont encore meilleurs pour des problèmes avec variables binaires [40, 77]. L'idée est simple, la mécanique est assez complexe, mais les résultats sont très impressionnants.

Cette méthode primale améliorée du simplexe s'adapte également à la résolution par génération de colonnes. Dans un avenir proche, il faudra voir de quelle manière on pourra exploiter la dégénérescence dans les algorithmes dual et primal-dual du simplexe, les algorithmes de réseau tel celui du problème d'affectation qui est dégénéré à 50 %, etc.

18 Conclusion

Les défauts de la décomposition de Dantzig-Wolfe en programmation linéaire sont bien connus et la méthode de génération de colonnes n'est certainement pas recommandée pour résoudre de grands problèmes linéaires. Par contre, en programmation linéaire entière, nous sommes en face de plusieurs succès commerciaux de l'équipe GENCOL dans le domaine de la confection d'itinéraires de véhicules et d'horaires d'équipes de travail. Les développements théoriques récents tels la stabilisation primale-duale, l'agrégation dynamique de contraintes et les coupes dérivées de la structure du problème maître permettent de croire à une plus grande utilisation de la méthode de génération de colonnes.

La première idée popularisée par l'équipe GENCOL a été la réduction du nombre de variables par l'utilisation de la méthode de génération de colonnes : les variables sont ajoutées au besoin en résolvant des problèmes de plus court chemin avec contraintes de ressources. Il a récemment été mis de l'avant la réduction du nombre de contraintes en agrégeant les tâches qui peuvent être faites par une même personne ou un même véhicule : c'est l'agrégation dynamique des contraintes. Cette seconde idée est beaucoup plus féconde que la première car elle réduit de manière significative la taille des matrices de base du problème maître tout comme la taille des réseaux des sous-problèmes : cette approche a ainsi un impact majeur sur le temps de résolution. Il n'est pas loin le temps où l'on fera l'intégration de ces deux approches et où des problèmes industriels de dizaines de milliers de tâches pourront être résolus avec le logiciel d'optimisation GENCOL.

En 1980, jamais François et Jacques n'auraient pensé que leur collaboration sur le problème d'affectation des autobus scolaires avec flexibilité sur les horaires les mènerait aussi loin.

Références

- [1] Achour, H., Gamache, M., Soumis, F., Desaulniers, G., An Exact Solution Approach for the Preferential Bidding System Problem in the Airline Industry, *Transportation Science* 41(3), 354–365, 2007.
- [2] Belov, G., Scheithauer, G., A cutting plane algorithm for the one-dimensional cutting stock problem with multiple lengths. *European Journal of Operational Research* 141(2), 274–294, 2002.

- [3] Belov, G., Scheithauer, G., A branch-and-cut-and-price algorithm for one-dimensional stock cutting and two-dimensional two-stage cutting. *European Journal of Operational Research* 171(1), 85–106, 2006.
- [4] Ben Amor, H., Desrosiers, J., A Proximal Trust-Region Algorithm for Column Generation Stabilization, *Computers & Operations Research* 33(4), 910–927, 2006.
- [5] Ben Amor, H., Desrosiers, J., Frangioni, A., On the Choice of Explicit Stabilizing Terms in Column Generation. *Discrete Applied Mathematics* 157(6), 1167–1184, 2009.
- [6] Ben Amor, H., Desrosiers, J., Soumis, F., Recovering an Optimal LP Basis from an Optimal Dual Solution, *Operations Research Letters* 34(5), 569–576, 2006.
- [7] Ben Amor, H., Desrosiers, J., Valério de Carvalho, JM., Dual-optimal Inequalities for Stabilizing Column Generation, *Operations Research* 54(3), 454–463, 2006.
- [8] Benders, J.F., Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems, *Numerische Mathematik* 4(1), 238–252, 1962.
- [9] Chabrier, A., Vehicle Routing Problem with Elementary Shortest Path Based Column Generation, *Computers & Operations Research* 33(10), 2972–2990, 2006.
- [10] Cordeau, J.-F., Desaulniers, G., Desrosiers, Lingaya, N., Soumis, F., Simultaneous Locomotive and Car Assignment at VIA Rail Canada, *Transportation Research B* 35(8), 767–787, 2001.
- [11] Cordeau, J.-F., Desrosiers, J., Soumis, F., A Benders Decomposition Approach for the Locomotive and Car Assignment Problem, *Transportation Science* 34(2), 133–149, 2000.
- [12] Cordeau, J.-F., Desrosiers, J., Soumis, F., Simultaneous Assignment of Locomotives and Cars to Passenger Trains, *Operations Research* 49(4), 531–548, 2001.
- [13] Cordeau, J.-F., Desrosiers, J., Soumis, F., Stojković, G., Benders Decomposition for Simultaneous Aircraft Routing and Crew Scheduling, *Transportation Science* 35(4), 375–388, 2001.
- [14] Dantzig, G.B., Wolfe P., Decomposition principle for linear programs. *Operations Research* 8, 101–111, 1960.
- [15] Desaulniers, G., Desrosiers, J., Dumas, Y., Marc, S., Rioux, B., Solomon, M.M., Soumis, F., Crew Pairing at Air France, *European Journal of Operational Research* 97, 245–259, 1997.
- [16] Desaulniers, G., Desrosiers, J., Ioachim, I., Solomon, M.M., Soumis, F., Villeneuve, D., A Unified Framework for Deterministic Time Constrained Vehicle Routing and Crew Scheduling Problems, in : T. Crainic and G. Laporte (eds.), *Fleet Management and Logistics*, Kluwer, Norwell, MA, 57–93, 1998.
- [17] Desaulniers, G., Desrosiers, J., Solomon, M.M., Accelerating Strategies in Column Generation for VRCS, in : C. C. Ribeiro and P. Hansen (eds.), *Essays and Surveys in Metaheuristics*, Kluwer, Norwell, MA, 309–324, 2002.
- [18] Desaulniers, G., Desrosiers, J., Solomon, M.M., Soumis, F., Daily Aircraft Routing and Scheduling, *Management Science* 43, 841–855, 1997.
- [19] Desaulniers, G., Desrosiers, J., Solomon, M.M., Soumis, F., The VRP with Time Windows, in : P. Toth and D. Vigo (eds.), *The Vehicle Routing Problem*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 157–193, 2002.
- [20] Desaulniers, G., Desrosiers, J., Spoorendonk, S., *Cutting Planes for Branch-and-Price Algorithms*, Les Cahiers du GERAD, G-2009-52, HEC Montréal, 14 pages, 2009.
- [21] Desrochers, M., *La fabrication d’horaires de travail pour les conducteurs d’autobus par une méthode de génération de colonnes*. Université de Montréal, Centre de recherche sur les transports, Publication #470, Montréal. 1986.
- [22] Desrochers, M., Desrosiers, J., Solomon, M.M., A New Optimization Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Time Windows, *Operations Research* 40, 342–354, 1992.
- [23] Desrochers, M., Soumis, F., A Generalized Permanent Labelling Algorithm for the Shortest Path Problems with Time Windows, *INFOR* 26, 193–214, 1988.
- [24] Desrochers, M., Soumis, F., A Reoptimization Algorithm for the Shortest Path Problems with Time Windows, *European Journal of Operational Research* 35, 242–254, 1988.
- [25] Desrochers, M., Soumis, F., Crew-OPT : Crew Scheduling by Column Generation, in : J.R. Daduna and A. Wren (eds.), *Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems 308 : Computer-Aided Transit Scheduling*, 83–90, 1988.
- [26] Desrochers, M., Soumis, F., Implantation et complexité des techniques de programmation dynamique dans les méthodes de confection de tournées et d’horaires, *RAIRO - Recherche opérationnelle* 25(3), 291–310, 1991.
- [27] Desrochers, M., Soumis, F., A Column Generation Approach to the Urban Transit Crew Scheduling Problem, *Transportation Science* 23(1), 1–13, 1989.
- [28] Desrochers, M., Soumis, F., Implantation et complexité des techniques de programmation dynamique dans les méthodes de confection de tournées et d’horaires, *RAIRO - Recherche opérationnelle* 25(3), 291–310, 1991.
- [29] Desrosiers, J., Dumas, Y., The Shortest Path for the Construction of Vehicle Routes with Pick-up, Delivery and Time Constrains, in : H.A. Eiselt and Pederzoli (eds.), *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 302; Advances in Optimization and Control*, Springer-Verlag, 144–157, 1988.

- [30] Desrosiers, J., Dumas, Y., Solomon, M.M., Soumis, F., Time Constrained Routing and Scheduling, in : MO. Ball et al. (eds.), *Handbooks in Operations Research and Management Science - Network Routing*, Elsevier Science B.V., 8, 35–139, 1995.
- [31] Desrosiers, J., Dumas, Y., Soumis, F., The Multiple Vehicle Dial-a-Ride Problem, in : J.R. Daduna and A. Wren (eds.), *Lecture Notes in Economics and Mathematical System 308; Computer-Aided Transit Scheduling*, Springer-Verlag, 15–27, 1988.
- [32] Desrosiers, J., Lasry, A., McInnis, D., Solomon, M.M., Soumis, F., ALTITUDE : The Airline Operations Management System at Air Transat, *Interfaces* 30(2), 41–53, 2000.
- [33] Desrosiers, J., Pelletier, P., Soumis, F., Plus court chemin avec contraintes d’horaires, *RAIRO - Recherche opérationnelle* 17(4), 357–377, 1983.
- [34] Desrosiers, J., Soumis, F., Desrochers, M., Routing with Time Windows by Column Generation, *Networks* 14(4), 545–565, 1984.
- [35] Desrosiers, J., Soumis, F., Dumas, Y., A Dynamic Programming Solution of a Large-Scale Single-Vehicle Dial-a-Ride with Time Windows, *American Journal of Mathematical and Management Sciences* 6, 301–325, 1986.
- [36] Dumas, Y., Desrosiers, J., Soumis, F., The Pickup and Delivery Problem with Time Windows, *European Journal of Operational Research* 54, 7–22, 1991.
- [37] Dumas, Y., Soumis, F., Desrosiers, J., Optimizing the Schedule for a Fixed Vehicle Path with Convex Inconvenience Costs, *Transportation Science* 24(2), 145–152, 1990.
- [38] du Merle, O., Villeneuve, D., Desrosiers, J., Hansen, P., Stabilized Column Generation, *Discrete Mathematics* 194, 229–237, 1999.
- [39] Elhallaoui, I., Desaulniers, G., Metrane, A., Soumis, F., Bi-dynamic Constraint Aggregation and Subproblem Reduction, *Computers & Operations Research* 35(5), 1713–1724, 2008.
- [40] Elhallaoui, I., Metrane, A., Desaulniers, G., Soumis, F., *An Improved Primal Simplex Algorithm for Degenerate Linear Programs*, Les Cahiers du GERAD, G-2007-66, HEC Montréal, 24 pages, 2007.
- [41] Elhallaoui, I., Metrane, A., Soumis, F., Desaulniers, G., Multi-phase Dynamic Constraint Aggregation for Set Partitioning Type Problems, accepté dans *Mathematical Programming B*, 2008.
- [42] Elhallaoui, I., Villeneuve, D., Soumis, F., Desaulniers, G., Dynamic Aggregation of Set Partitioning Constraints in Column Generation, *Operations Research* 53(4), 632–645, 2005.
- [43] Erdman, A., Desaulniers, G., Desrosiers, J., Solomon, M.M., Soumis, F., VRP with Pickups and Deliveries, in P. Toth and D. Vigo (eds.), *The Vehicle Routing Problem*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 225–242, 2002.
- [44] Feillet, D., Dejax, P., Gendreau, M., Gueguen, C., An Exact Algorithm for the Elementary Shortest Path Problem with Resource Constraints : Application to Some Vehicle Routing Problems, *Networks* 44(3), 216–229, 2004.
- [45] Gamache, M., Soumis, F., Marquis, G., Desrosiers, J., A Column Generation Approach for Large Scale Aircrew Rostering Problems, *Operations Research* 47(2), 247–262, 1999.
- [46] Gamache, M., Soumis, F., Villeneuve, D., Desrosiers, J., Gélinas, É., The Preferential Bidding System at Air Canada, *Transportation Science* 32(3), 246–255, 1998.
- [47] Gilmore, P.C., Gomory, R.E. A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research* 9, 849–859, 1961.
- [48] Haase, K., Desaulniers, G., Desrosiers, J., Simultaneous Vehicle and Crew Scheduling in Urban Mass Transit Systems, *Transportation Science* 35(3), 286–303, 2001.
- [49] Hadjar, A., Marcotte, O., Soumis, F., A Branch-and-Cut Algorithm for the Multiple Depot Vehicle Scheduling Problem, *Operations Research* 54(1), 130–149, 2006.
- [50] Hamdouni, M., Desaulniers, G., Soumis, F., Parking Buses in a Depot Using Block Pattern : A Benders Decomposition Approach for Minimizing Type Mismatches, *Computer & Operations Research* 34(11), 3362–3379, 2007.
- [51] Hamdouni, M., Soumis, F., Desaulniers, G., Parking Buses in a Depot with Stochastic Arrival Times, *European Journal of Operational Research* 183(2), 502–515, 2007.
- [52] Hicks, R., Madrid, R., Milligan, C., Pruneau, R., Kanaley, M., Dumas, Y., Lacroix, B., Desrosiers, J., Soumis, F., Bombardier Flexjet Significantly Improves Its Fractional Aircraft Ownership Operations, *Interfaces* 35(1) (Special Issue, Franz Edelman Award for Achievement in Operations Research and the Management Sciences) 49–60, 2005.
- [53] Ioachim, I., Gélinas, S., Desrosiers, J., Soumis, F., A Dynamic Programming Algorithm for the Shortest Path Problem with Time Windows and Linear Node Costs, *Networks* 31, 193–204, 1998.
- [54] Irnich, S., Resource extension functions : Properties, inversion, and generalization to segments, *OR Spectrum* 30(1), 113–148, 2008.
- [55] Irnich, S., Desaulniers, G., Shortest Path Problems with Resource Constraints, in : G. Desaulniers, J. Desrosiers, M.M. Solomon (eds.), *Column Generation*, Springer, New York, 33–65, 2005.

- [56] Irnich S., Villeneuve, D. The Shortest-Path Problem with Resource Constraints and k -Cycle Elimination for $k \geq 3$, *Informs Journal on Computing* 18(3), 391–406, 2006
- [57] Jepsen, M., Petersen, B., Spoorendonk, S., Pisinger, D. Subset-row Inequalities Applied to the Vehicle Routing Problem with Time Windows, *Operations Research* 56(2), 497–511, 2008.
- [58] Kohl, N., Desrosiers, J., Madsen, O.B.G., Solomon, M.M., Soumis, F., 2-Path Cuts for the Vehicle Routing Problem with Time Windows, *Transportation Science* 33(1), 101–116, 1999.
- [59] Land, A., Powell, S., *FORTRAN Codes for Mathematical Programming : Linear, Quadratic and Discrete*. John Wiley & Sons, Inc. New York, USA. 1973.
- [60] Lasdon, L. S. *Optimization Theory for Large Systems*. Macmillan, London, UK. 1970.
- [61] Lemaréchal, C., Bundle Methods in Nonsmooth Optimization, in : C. Lemaréchal and R. Mifflin (eds), *Nonsmooth Optimization*, vol. 3 of IIASA Proceedings Series, Pergamon Press, 1978.
- [62] Lingaya, N., Cordeau, J.-F., Desaulniers, G., Desrosiers, J., Soumis, F., Operational Car Assignment at VIA Rail Canada, *Transportation Research B* 36(9), 755–778, 2002.
- [63] Marsten, R., The Design of the XMP Linear Programming Library, *ACM Transactions on Mathematical Software* 7(4), 481–497, 1981.
- [64] Mercier, A., Cordeau, J.-F., Soumis, F., A Computational Study of Benders Decomposition for the Integrated Aircraft Routing and Crew Scheduling Problem, *Computers & Operations Research* 32(6), 1451–1476, 2005.
- [65] Mercier, A., Soumis, F., An Integrated Aircraft Routing, Crew Scheduling and Flight Retiming Model, *Computers & Operations Research* 34(8), 2251–2265, 2007.
- [66] Minoux, M., Lavoie, S., Odier, E., A New Approach of Crew Pairing Problems by Column Generation and Application to Air Transport. *European Journal of Operational Research* 35, 45–58, 1988.
- [67] Nagih, A., Soumis, F., Nodal Aggregation of Resource Constraints in a Shortest Path Problem, *European Journal of Operational Research* 172(2), 500–514, 2006.
- [68] Nemhauser, G.L., Park, S. A polyhedral approach to edge coloring. *Operations Research Letters* 10(6), 315–322, 1991.
- [69] Oukil, A., Ben Amor, H., Desrosiers, J., El Gueddari, H., Stabilized Column Generation for Highly Degenerate Multiple-Depot Vehicle Scheduling Problems, *Computers & Operations Research* 34(3), 817–834, 2006.
- [70] Petersen, B., Pisinger, D., Spoorendonk, S., Chvátal-Gomory Rank-1 Cuts Used in a Dantzig-Wolfe Decomposition of the Vehicle Routing Problem with Time Windows, in : B. Golden, R. Raghavan, and E. Wasil (eds.), *The Vehicle Routing Problem : Latest Advances and New Challenges*, Springer, 397–420, 2008.
- [71] Ribeiro, C., Soumis, F., A Column Generation Approach to the Multiple-Depot Vehicle Scheduling Problem, *Operations Research* 42(1), 41–53, 1994.
- [72] Rousseau, J.M., Desrosiers, J., Results Obtained with CREW-OPT : a Column Generation Method for Transit Crew Scheduling, in : J.R. Daduna et al. (eds.), *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 430, 349–358, 1995.
- [73] Solomon, M.M., Desrosiers, J., Time Window Constrained Routing and Scheduling Problems, *Transportation Science* 22(1), 1–13, 1988.
- [74] Spoorendonk, S., Desaulniers, G., Clique inequalities applied to the vehicle routing problem with time windows. Les Cahiers du GERAD G-2008-72, HEC Montréal, Canada, 2008. Accepté dans *INFOR*.
- [75] Stojković, M., Soumis, F., An Optimization Model for the Simultaneous Operational Flight and Pilot Scheduling Problem, *Management Science* 47(9), 1290–1305, 2001.
- [76] Stojković, M., Soumis, F., Desrosiers, J., The Operational Airline Crew Scheduling Problem, *Transportation Science* 32(3), 232–245, 1998.
- [77] Raymond, V., Soumis, F., Metrane, A., *Improved Primal Simplex Version 3 : Cold Start, Generalization for Bounded Variable Problems and a New Implementation*, Les Cahiers du GERAD, G-2009-15, HEC Montréal, 17 pages, 2009.
- [78] Raymond, V., Soumis, F., Orban, D., A New Version of the Improved Primal Simplex for Degenerate Linear Program, *Computers & Operations Research* 37(1), 91–98, 2010.
- [79] Righini, G., Salani, M., Symmetry Helps : Bounded Bi-directional Dynamic Programming for the Elementary Shortest Path Problem with Resource Constraints, *Discrete Optimization* 3(3), 255–273, 2006.
- [80] Villeneuve, D., Desaulniers, G., The Shortest Path Problem with Forbidden Paths, *European Journal of Operational Research* 165(1), 97–107, 2005.
- [81] Villeneuve, D., Desrosiers, J., Lübbecke, M.E., Soumis, F., On Compact Formulations for Integer Programs Solved by Column Generation, *Annals of Operations Research* 139(1), 375–388, 2005.
- [82] Ziarati, K., Soumis, F., Desrosiers, J., Gélinas, S., Saintonge, A., Locomotive Assignment with Heterogeneous Consists at CN North America, *European Journal of Operational Research* 97, 281–292, 1997.
- [83] Ziarati, K., Soumis, F., Desrosiers, J., Solomon, M.M., A Branch-First, Cut-Second Approach for Locomotive Assignment, *Management Science* 45(8), 1156–1168, 1999.